Exercices AP1

Exercice 1

Démontrer les égalités suivantes:

1. $\dfrac{x^2+12}{x^2-4} = \dfrac{2x}{x-2} - \dfrac{x+6}{x+2}$

2. $(x-3)(x^2+3x-10) = (x+5)(x^2-5x+6)$

3. $(a^2-b^2)^2 + (2ab)^2 = (a^2+b^2)^2$

Exercice 2

Démontrer par récurrence que:

1. $1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ pour tout $n \geqslant 1$.

2. 7^n+2 est divisible par 3 pour tout $n \in \mathbb{N}$

Correction

Exercice 1

1. On part du côté droit et on met au même dénominateur:

$$\begin{aligned}
\frac{2x}{x-2} - \frac{x+6}{x+2} &= \frac{2x}{x-2} \times \frac{x+2}{x+2} - \frac{x+6}{x+2} \times \frac{x-2}{x-2} \\
&= \frac{2x(x+2)}{(x-2)(x+2)} - \frac{(x+6)(x-2)}{(x+2)(x-2)} \\
&= \frac{2x^2+4x}{(x-2)(x+2)} - \frac{x^2-2x+6x-12}{(x+2)(x-2)} \\
&= \frac{2x^2+4x-x^2-4x+12}{x^2-4} \\
&= \frac{x^2+12}{x^2-4}
\end{aligned}$$

2. On développe des deux côtés et on compare les résultats:

$$\begin{aligned}
(x-3)(x^2+3x-10) &= x^3+3x^2-10x-3x^2-9x+30 \\
&= x^3-19x+30
\end{aligned}$$

D'autre part:

$$\begin{aligned}
(x+5)(x^2-5x+6) &= x^3-5x^2+6x+5x^2-25x+30 \\
&= x^3-19x+30
\end{aligned}$$

Les deux termes sont égaux. L'égalité est prouvée.

3. On part du côté gauche:

$$\begin{aligned}
(a^2-b^2)^2+(2ab)^2 &= a^4-2\times a^2b^2+b^4+4a^2b^2 \\
&= a^4+2a^2b^2+b^4 \text{ (identité remarquable } (a+b)^2\text{)} \\
&= (a^2+b^2)^2
\end{aligned}$$

Remarque: On peut aussi développer le côté droit et comparer avec l'avant-dernier résultat obtenu du côté gauche.

Exercice 2

1. • Initialisation: Pour n=1, le terme de gauche vaut $1^2 = 1$ et celui de droite vaut $\dfrac{1 \times 2 \times 3}{6} = 1$.
La propriété est vraie au rang 1.
• Hérédité: Supposons la propriété vraie pour un rang n donné, c'est à dire:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Donc, en ajoutant $(n+1)^2$ de chaque côté, on obtient:

$$\begin{aligned}
1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 + (n+1)^2 &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 \\
&= \frac{n\underline{(n+1)}(2n+1)}{6} + \frac{6 \times \underline{(n+1)}^2}{6} \text{ (facteur commun)} \\
&= \frac{(n+1)(n(2n+1) + 6(n+1))}{6} \\
&= \frac{(n+1)(2n^2 + n + 6n + 6)}{6} \\
&= \frac{(n+1)(2n^2 + 7n + 6)}{6}
\end{aligned}$$

A ce stade, il est temps, si cela n'est pas déjà fait, de se poser la question de ce qu'il faut trouver comme résultat à droite pour le rang $n+1$. L'expression $\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ au rang n devient au rang suivant $\dfrac{(n+1)(n+2)(2(n+1)+1)}{6}$, c'est à dire $\dfrac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$.
En comparant notre résultat avec cette dernière expression, on voit qu'il suffit de prouver que:
$2n^2 + 7n + 6 = (n+2)(2n+3)$, ce qui s'obtient facilement en développant:
$(n+2)(2n+3) = 2n^2 + 3n + 4n + 6 = 2n^2 + 7n + 6$. C'est gagné...la propriété est vraie au rang $n+1$.
• Conclusion: La propriété est initialisée et héréditaire. Elle est donc vraie pour tout entier $n \geqslant 1$.

2. • Initialisation: pour $n = 0$, on a $7^0 + 2 = 3$. C'est bien divisible par 3. La propriété est vraie au rang 0.
• Hérédité: Supposons la propriété vraie pour un rang n donné, c'est à dire que $7^n + 2$ est divisible par 3. Autrement dit, $7^n + 2$ est un multiple de 3 et peut donc s'écrire $7^n + 2 = 3p$ avec p entier. (Nous devons montrer que $7^{n+1} + 2$ est un multiple de 3).
En multipliant par 7 dans les deux membres de notre hypothèse de récurrence, on obtient:
$7 \times (7^n + 2) = 7 \times 3p$, puis:
$7^{n+1} + 14 = 21p$, puis, on découpe 14 en $2 + 12$ pour se rapprocher de notre objectif:
$7^{n+1} + 2 + 12 = 21p$, afin d'obtenir:
$7^{n+1} + 2 = 21p - 12$, qu'on peut aussi écrire:
$7^{n+1} + 2 = 3 \times (7p - 4)$, ce qui prouve que $7^{n+1} + 2$ est un multiple de 3. La popriété est vraie au rang $n+1$.
• Conclusion: La propriété est initialisée et héréditaire. Elle est donc vraie pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.