SYSTEMES

1 Système de deux équations du premier degré à deux inconnues

Définition

On appelle système de deux équations du premier degré à deux inconnues x et y tout système qui s'écrit sous la forme:

$$\left\{\begin{array}{rcrcl} ax & + & by & = & c \\ a'x & + & b'y & = & c' \end{array}\right.$$

où a, b, c, a', b' et c' sont des réels connus.

Il existe deux méthodes de résolution par calcul:

1.1 Méthode par substitution

Cette méthode est surtout avantageuse si l'un au moins des coefficients a, b, a' ou b' vaut 1 ou -1. Sinon elle génère des fractions!!!
Explications sur un exemple:

$$\left\{\begin{array}{rcl} 2x+y & = & 7 \\ 3x-4y & = & -6 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} y & = & 7-2x \\ 3x-4y & = & -6 \end{array}\right.$$

On choisit une inconnue sur une équation (4 choix possibles, mais ici, un seul pertinent) et on l'isole

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} y & = & \boxed{7-2x} \\ 3x-4\boxed{(7-2x)} & = & -6 \end{array}\right.$$

On substitue l'expression de y trouvée en fonction de x dans l'autre équation $\Rightarrow$ équation du 1er degré à une inconnue

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} y & = & 7-2x \\ 3x-28+8x & = & -6 \end{array}\right.$$

on ne touche pas à cette équation
on résout cette équation pour trouver x

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} y & = & 7-2x \\ 11x & = & 22 \end{array}\right.$$

on ne touche pas à cette équation
on résout cette équation pour trouver x

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} y & = & 7-2x \\ x & = & 2 \end{array}\right.$$

on ne touche pas à cette équation
on a trouvé x

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} y & = & 7-2\times\boxed{2} \\ x & = & \boxed{2} \end{array}\right.$$

on remplace x par sa valeur pour trouver y

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} y & = & 3 \\ x & = & 2 \end{array}\right.$$

. On écrit $\mathcal{S}=\{(2;3)\}$

Exercice 1

Résoudre les systèmes: 1. $\left\{\begin{array}{rcl} x+y & = & 40 \\ x-y & = & 12 \end{array}\right.$; 2. $\left\{\begin{array}{rcl} 6x+5y & = & 61 \\ 4x-y & = & 6 \end{array}\right.$; 3. $\left\{\begin{array}{rcl} y & = & 2x+5 \\ y & = & 5x-7 \end{array}\right.$

1.2 Méthode par combinaison

Cette méthode marche....tout le temps!! Il s'agit d'éliminer une inconnue en multipliant les deux équations par des nombres de telle sorte que l'inconnue choisie ait le même coefficient dans les deux équations. En soustrayant ensuite les deux équations membre à membre, l'inconnue disparaît et il reste à résoudre une équation du premier degré à une inconnue.
Explications sur un exemple:

$$\left\{\begin{array}{rcl} 3x+5y &=& 5 \\ 4x-7y &=& 34 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcll} 12x+20y &=& 20 & \text{On multiplie par 4 (on choisit d'éliminer } x) \\ 12x-21y &=& 102 & \text{On multiplie par 3} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcll} 41y &=& -82 & \text{on soustrait les deux équations membre à membre...attention au signe!} \\ 3x+5y &=& 5 & \text{on reprend l'une des équations initiales qui servira à la fin à trouver } x \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcll} y &=& \boxed{-2} & \text{on a trouvé } y \\ 3x+5\times\boxed{-2} &=& 5 & \text{on remplace } y \text{ par sa valeur pour trouver } x \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcll} y &=& -2 & \\ 3x-10 &=& 5 & \text{on résout l'équation du premier degré à une inconnue} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcll} y &=& -2 & \\ 3x &=& 15 & \text{on résout l'équation du premier degré à une inconnue} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} y &=& -2 \\ x &=& 5 \end{array}\right. \text{. On écrit } \mathcal{S}=\{(5;-2)\}$$

Remarques

• La rédaction correcte de la résolution d'un système doit être comme ci-dessus...

• Notez bien la structure de l'ensemble des solutions. Les accolades signifient « ensemble ». Les parenthèses signifient qu'il n'y a qu'une seule solution constituée d'un couple de réels (comme des coordonnées) constitué de la première inconnue, puis de la seconde.
Ecrire $\mathcal{S}=\{5;-2\}$ correspondrait à une équation à une inconnue qui aurait deux solutions: exemple $(x-5)(x+2)=0$.

• On aurait presque tout aussi facilement pu décider d'éliminer y. Dans ce cas, il fallait multiplier la première équation par 7 pour obtenir $35y$ et la seconde par 5 pour obtenir $-35y$. Les coefficients étant opposés, il faut alors additionner les deux équations. Si on tient absolument à soustraire, alors il suffit de multiplier la seconde équation par -5.

• Le choix de l'inconnue à éliminer est dicté par la recherche de simplicité. On cherche à multiplier par les plus petits nombres possibles. On retrouve le même travail que pour une mise au même dénominateur de deux fractions. Donc plutôt que multiplier la première équation par le coefficient de la seconde, et la seconde équation par le coefficient de la première, on cherche à obtenir le plus petit multiple commun (PPCM)

Exercice 2

Résoudre les systèmes suivants par combinaison, en cherchant à optimiser le choix de l'inconnue et des coefficients à multiplier

1. $\left\{\begin{array}{rcl} 4x+5y &=& 17 \\ 7x-10y &=& 86 \end{array}\right.$; 2. $\left\{\begin{array}{rcl} 12x+17y &=& 70 \\ 18x+13y &=& 80 \end{array}\right.$; 3. $\left\{\begin{array}{rcl} y &=& 2x+5 \\ y &=& 5x-7 \end{array}\right.$

2 Système de trois équations du premier degré à trois inconnues

Définition

On appelle système de trois équations du premier degré à trois inconnues x ,y et z tout système qui s'écrit sous la forme:

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} ax & + & by & + & cz & = & d \\ a'x & + & b'y & + & c'z & = & d' \\ a''x & + & b''y & + & c''z & = & d'' \end{array}\right.$$

où a, b, c, d, a', b',c', d', a'', b'',c'' et d'' sont des réels connus.

Les techniques de résolution sont les mêmes: substitution ou combinaisons, mais il faut être plus rigoureux. L'idée principale consiste à éliminer une inconnue dans un sous-système de DEUX équations, qu'on résout ensuite comme dans le paragraphe précédent.

Exemple:

$$\left\{\begin{array}{rcl} 2x+3y-4z & = & 8 \\ 3x+5y+6z & = & 25 \\ -4x-7y-2z & = & -28 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcll} 12x+18y-24z & = & 48 & \text{On multiplie par 6 (on choisit d'éliminer } x\text{)} \\ 12x+20y+24z & = & 100 & \text{On multiplie par 4} \\ -12x-21y-6z & = & -84 & \text{On multiplie par 3} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcll} -2y-48z & = & -52 & \text{on soustrait les équations } 1 \text{ et } 2 \text{ membre à membre} \\ -3y-30z & = & -36 & \text{on ajoute les équations } 1 \text{ et } 3 \text{ membre à membre} \\ 2x+3y-4z & = & 8 & \text{on reprend l'une des équations initiales qui servira à trouver } x \end{array}\right.$$

on résout le sous-système des deux premières équations

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcll} -6y-144z & = & -156 & (\times 3) \\ -6y-60z & = & -72 & (\times 2) \\ 2x+3y-4z & = & 8 & \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcll} -84z & = & -84 & \text{on soustrait les équations } 1 \text{ et } 2 \text{ membre à membre} \\ -3y-30z & = & -36 & \text{on récupère l'équation } 2 \text{ avant multiplication} \\ 2x+3y-4z & = & 8 & \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcll} z & = & 1 & \\ -3y-30\times 1 & = & -36 & \\ 2x & = & 8-3y+4z & \text{on prépare le calcul de } x \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} z & = & 1 \\ -3y & = & -36+30=-6 \\ 2x & = & 8-3y+4z \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} z & = & 1 \\ y & = & -36+30=2 \\ 2x & = & 8-3\times 2+4\times 1=6 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} z & = & 1 \\ y & = & 2 \\ x & = & 3 \end{array}\right. . \text{ On écrit } \mathcal{S}=\{(3;2;1)\}$$

Exercice 1

1. $\begin{cases} x+y = 40 \\ x-y = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 40-y \\ x-y = 12 \end{cases}$ les 4 choix sont pertinents

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \boxed{40-y} \\ \boxed{40-y}-y = 12 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 40-y \\ -2y = 12-40 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 40-y \\ y = \dfrac{-28}{-2} = 14 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 40-14 = 26 \\ y = 9 \end{cases}$. $\mathcal{S} = \{(26;9)\}$

2. $\begin{cases} 6x+5y = 61 \\ 4x-y = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6x+5y = 61 \\ y = 4x-6 \end{cases}$ un seul choix pertinent

$\Leftrightarrow \begin{cases} 6x+5\times\boxed{(4x-6)} = 61 \\ y = \boxed{4x-6} \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 6x+20x-30 = 61 \\ y = 4x-6 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 26x = 91 \\ y = 4x-6 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{91}{26} = \dfrac{7}{2} \\ y = 4\times\dfrac{7}{2}-6 = 8 \end{cases}$. $\mathcal{S} = \left\{\left(\dfrac{7}{2};8\right)\right\}$

3. $\begin{cases} y = 2x+5 \\ y = 5x-7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \boxed{2x+5} \\ \boxed{2x+5} = 5x-7 \end{cases}$ substitution déjà prête

$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x+5 \\ -3x = -12 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x+5 \\ x = \dfrac{-12}{-3} = 4 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 2\times4+5 = 13 \\ x = 4 \end{cases}$. $\mathcal{S} = \{(4;13)\}$

Exercice 2

1. $\begin{cases} 4x+5y &= 17 \\ 7x-10y &= 86 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8x+10y &= 34 & \text{On multiplie par 2 (on choisit d'éliminer } y) \\ 7x-10y &= 86 & \text{car une seule multiplication suffit} \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 15x &= 120 & \text{on ajoute les deux équations membre à membre...} \\ 4x+5y &= 17 & \text{on reprend l'une des équations initiales qui servira à la fin à trouver } y \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x &= \dfrac{120}{15} = 8 \\ 4\times 8+5y &= 17 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x &= 8 \\ 5y &= 17-32 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x &= 8 \\ y &= \dfrac{-15}{5} = -3 \end{cases}$. $\quad \mathcal{S} = \{(8;-3)\}$

2. $\begin{cases} 12x+17y &= 70 & (\times 3) \\ 18x+13y &= 80 & (\times 2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 36x+51y &= 210 \\ 36x+26y &= 160 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 25y &= 50 & \text{on soustrait les deux équations membre à membre...} \\ 12x+17y &= 70 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y &= \dfrac{50}{25} = 2 \\ 12x+17\times 2 &= 70 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y &= 2 \\ 12x &= 70-34 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y &= 2 \\ x &= \dfrac{36}{12} = 3 \end{cases}$. $\quad \mathcal{S} = \{(3;2)\}$

3. $\begin{cases} y &= 2x+5 \\ y &= 5x-7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 &= -3x+12 & \text{on soustrait les deux équations membre à membre...} \\ y &= 2x+5 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x &= 12 \\ y = &= 2x+5 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x &= \dfrac{12}{3} = 4 \\ y &= 2\times 4+5 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x &= 4 \\ y &= 13 \end{cases}$. $\quad \mathcal{S} = \{(4;13)\}$