PREMIER DEGRÉ

1 Équations du premier degré

Principe

Une **équation du premier degré** est une équation de la forme $ax+b=0$ avec $a \neq 0$ où x est l'inconnue.
Résoudre une telle équation consiste à « trouver le nombre x » pour lequel $ax+b=0$.
La théorie :
$ax+b=0 \Longleftrightarrow ax=-b \Longleftrightarrow x=-\dfrac{b}{a}$ donc : $\mathcal{S}=\left\{-\dfrac{b}{a}\right\}$

La pratique :

$$\begin{array}{rrll}
 & -2x+4 & =0 & \textit{on ajoute } -4 \textit{ des deux côtés de l'égalité} \\
\Longleftrightarrow & -2x & =-4 & \textit{on divise par } -2 \textit{ qui est non nul des deux côtés de l'égalité} \\
\Longleftrightarrow & x & =\dfrac{-4}{-2} & \textit{on simplifie} \\
\Longleftrightarrow & x & =2 &
\end{array}$$

On peut vérifier que lorsque l'on remplace x par 2 dans $-2x+4$, on obtient $-2\times 2+4=0$.

Exercice 1 Résoudre les équations suivantes.

1. $x-9=-4$.
2. $-x+5=12$.
3. $3x=-24$.
4. $4x=0$.
5. $\dfrac{1}{4}x=16$.
6. $5x-9=3x+4$.
7. $x-\dfrac{2}{3}=3x+\dfrac{3}{4}$.
8. $\dfrac{3x}{4}=\dfrac{2}{3}$.
9. $\dfrac{7}{5}x+4=-\dfrac{2}{3}$.

2 Équation produit

Lorsque l'on a affaire à un produit de plusieurs facteurs égal à 0, on utilise la règle suivante :

Règle du produit nul

Un produit de facteurs est nul si et seulement si l'un des facteurs est nul :

$$A\times B=0 \Longleftrightarrow A=0 \text{ ou } B=0.$$

...ce qui nous ramène souvent à résoudre des équations de degré 1 (ou 2 ! !)

Attention

Il est essentiel d'avoir une forme **factorisée et égale 0**. Il faut donc mettre tous les termes du même côté (si ce n'est pas fait) et factoriser l'expression obtenue. Il arrive qu'il faille développer une expression avant de pouvoir la factoriser, mais en général, développer n'est pas une bonne idée.

La pratique ... direct ...

$$\begin{array}{ll}
 & (x+1)(x+11)=0 \\
\Longleftrightarrow & x+1=0 \text{ ou } x+11=0 \\
\Longleftrightarrow & x=-1 \text{ ou } x=-11 \qquad \mathcal{S}=\{-11;-1\}.
\end{array}$$

Exercice 2 Résoudre les équations suivantes.

1. $(x-1)(x+2)=0$.
2. $2x(3x-1)=0$.
3. $(2+x)(2-3x)=0$.
4. $-3(x-1)=0$.
5. $(x+1)(3x-4)(2x-3)=0$.
6. $\sqrt{2}(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)=0$.

Exercice 3 Ecrire sous la forme d'un produit nul, puis résoudre l'équation produit :

1. $4x^2-5x=0$
2. $2x^3=32x$
3. $(5x-2)(x+7)=(5x-2)^2$.
4. $2(3x-5)=-(x+7)(3x-5)$.
5. $(2x+3)^2=(x+5)(2x+3)$.
6. $(3x-2)^2=81$.

3 Équation quotient

Lorsque l'on a affaire à un ou plusieurs dénominateurs (contenant l'inconnue), il faut mettre tous les termes du même côté (pour avoir 0) et les mettre au même dénominateur. On peut alors appliquer la règle suivante :

Règle du quotient nul

Un quotient de facteurs est nul si et seulement si son numérateur est nul ET son dénominateur NON nul :

$$\frac{A}{B}=0 \Longleftrightarrow A=0 \text{ et } B\neq 0.$$

...ce qui nous ramène souvent à résoudre des équations de degré 1 (ou 2 ! !).

Attention

☞ La résolution de $A=0$ fournit les solutions éventuelles.
☞ La résolution de $B=0$ fournit les valeurs interdites. Ce ne sont donc PAS des solutions
☞ Si un nombre est à la fois solution de $A=0$ et de $B=0$, il n'est pas solution de l'équation quotient.

Exemples.

$$\begin{aligned}\frac{x+1}{x+11}=0 &\Longleftrightarrow x+1=0 \text{ et } x+11\neq 0\\ &\Longleftrightarrow x=-1 \text{ et } x\neq -11\\ &\qquad \mathcal{S}=\{-1\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{x^2-1}{2x+2}=0 &\Longleftrightarrow x^2-1=0 \text{ et } 2x+2\neq 0\\ &\Longleftrightarrow (x-1)(x+1)=0 \text{ et } 2x\neq -2\\ &\Longleftrightarrow (x-1=0 \text{ ou } x+1=0) \text{ et } x\neq -1\\ &\Longleftrightarrow (x=1 \text{ ou } \underbrace{x=-1) \text{ et } x\neq -1}_{\text{conflit !!!}} \qquad \mathcal{S}=\{1\}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{2x+3}{x-2}=4 &\Longleftrightarrow \frac{2x+3}{x-2}-4=0\\ &\Longleftrightarrow \frac{2x+3}{x-2}-\frac{4(x-2)}{x-2}=0\\ &\Longleftrightarrow \frac{2x+3-4(x-2)}{x-2}=0\\ &\Longleftrightarrow \frac{2x+3-4x+8}{x-2}=0\\ &\Longleftrightarrow \frac{-2x+11}{x-2}=0\\ &\Longleftrightarrow -2x+11=0 \text{ et } x-2\neq 0\\ &\Longleftrightarrow -2x=-11 \text{ et } x\neq 2\\ &\Longleftrightarrow x=\frac{11}{2} \text{ et } x\neq 2\\ &\qquad \mathcal{S}=\left\{\frac{11}{2}\right\}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\frac{x+2}{x+4}-\frac{x-5}{x-4}=\frac{1}{x^2-16}\\ \Longleftrightarrow\ &\frac{(x+2)(x-4)}{(x+4)(x-4)}-\frac{(x-5)(x+4)}{(x-4)(x+4)}-\frac{1}{(x-4)(x+4)}=0\\ \Longleftrightarrow\ &\frac{x^2-4x+2x-8-(x^2+4x-5x-20)-1}{(x-4)(x+4)}=0\\ \Longleftrightarrow\ &\frac{-x+11}{(x-4)(x+4)}=0\\ \Longleftrightarrow\ &-x+11=0 \text{ et } (x-4\neq 0 \text{ et } x+4\neq 0)\\ \Longleftrightarrow\ &x=11 \text{ et } (x\neq 4 \text{ et } x\neq -4)\\ &\mathcal{S}=\{11\}.\end{aligned}$$

4 Signe de ax+b

Règle des tableaux de signes

Le signe d'une expression du premier degré s'obtient facilement en :

☞ résolvant l'équation $ax+b=0 \Leftrightarrow ax=-b \Leftrightarrow x=-\dfrac{b}{a}$

☞ choisissant l'un des deux tableaux de signes en fonction du **signe de a** :

$\boxed{a>0}$

x	$-\infty$		$-\dfrac{b}{a}$		$+\infty$
$ax+b$		$-$	0	$+$	

$\boxed{a<0}$

x	$-\infty$		$-\dfrac{b}{a}$		$+\infty$
$ax+b$		$+$	0	$-$	

On peut aussi retenir que le **signe de a est toujours à droite du zéro**

Remarques

• Les tableaux de signes permettent de résoudre des inéquations, c'est à dire déterminer tous les réels x qui vérifient une expression comportant l'un des sens suivants : $\leqslant$, $<$, $\geqslant$, $>$. Dans ce contexte, seule une partie de la dernière ligne nous intéresse (celle dont le signe correspond au sens de l'inéquation.)

• Les tableaux de signes interviennent aussi dans d'autres contextes : tableau de signes de la fonction dérivée f' d'une fonction f pour déterminer le sens de variation de cette fonction f, position relative de deux courbes, etc...

Exemple. Résoudre $-2x+8 \geqslant 0$.

On résout $-2x+8=0 \Leftrightarrow -2x=-8 \Leftrightarrow x=4$. $a=-2<0$, donc le tableau de signes est :

x	$-\infty$		4		$+\infty$
$-2x+8$		$+$	0	$-$	

Donc $\mathcal{S}=]-\infty;4]$.

Danger

On peut aussi résoudre les inéquations du premier degré par le calcul, mais il faut alors tenir compte de la règle suivante :

Règle de multiplication dans une inégalité

Dans une inégalité, on peut multiplier ou diviser chaque membre par un même nombre non nul :

− sans changer le sens de l'inégalité si ce nombre est positif.

− en changeant le sens de l'inégalité si ce nombre est négatif.

Ainsi, dans l'exemple précédent :

$-2x+8 \geqslant 0 \Leftrightarrow -2x \geqslant -8 \Leftrightarrow x \leqslant 4$ (division par -2)

Le non respect de cette règle conduit à de nombreuses erreurs (on obtient le contraire du résultat souhaité) et il vaut mieux utiliser la technique des tableaux de signes. Hélas, dans certains cas que vous rencontrerez cette année, vous ne pourrez pas y échapper. Elle est donc à savoir ABSOLUMENT.

Exercice 4 Résoudre les inéquations suivantes :

1. $2x+6 \leqslant 0$
2. $-3x-4<0$
3. $-x \geqslant 0$

5 Signe d'un produit

Principe

Comme pour l'équation produit, il faut avoir une **forme factorisée d'un côté, et zéro de l'autre**. Voir les sections précédentes pour parvenir à ce résultat !
Ceci étant fait, on étudie le signe de chacun des facteurs dans le même tableau.

Exemple. Résoudre $4x(2x+4)(8-x) \leqslant 0$

$4x=0$	$2x+4=0$	$8-x=0$
$x=\frac{0}{4}=0$	$2x=-4$	$-x=-8$
$x=0$	$x=-2$	$x=8$

x	$-\infty$		-2		0		8		$+\infty$
$4x$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$2x+4$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$8-x$		$+$		$+$		$+$	0	$-$	
$4x(2x+4)(8-x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

$\mathcal{S}=[-2;0]\cup[8;+\infty[$

Exercice 5 Résoudre les inéquations suivantes :

1. $x^2 \geqslant 4x$.
2. $9 > (x-4)^2$.
3. $5x^3 \leqslant 15x$.

Les trois inéquations précédentes nécessitent d'être transformées avant d'envisager les tableaux de signes.
Les deux premières peuvent se faire en utilisant le discriminant d'un trinôme, mais essayez plutôt d'obtenir une factorisation (voir fiche calcul numérique et algébrique).

Danger

Dans les 1ère et 3ème inéquations, il peut être tentant de simplifier par x de chaque côté, mais c'est une grosse erreur : « simplifier »par x correspond en fait à diviser par x de chaque côté. Or, le signe de x est inconnu, et l'on ne peut donc pas savoir s'il faut changer ou non le sens de l'inéquation. Il faut donc absolument passer tout du même côté et factoriser. Bien entendu, si l'on sait par hypothèse que $x>0$, alors la simplification devient possible.

6 Signe d'un quotient

Principe

Comme pour l'équation quotient, il faut avoir **un seul quotient d'un côté, et zéro de l'autre**. Voir les sections précédentes pour parvenir à ce résultat !
Ceci étant fait, on étudie le signe de chacun des facteurs du numérateur ET du dénominateur dans le même tableau. La différence avec le signe d'un produit réside dans les double barres que l'on doit placer au niveau des valeurs interdites (zéros du dénominateur) sur la dernière ligne. Ces valeurs se retrouvent donc exclues de l'ensemble des solutions.

Exemple. Résoudre $\dfrac{2x+4}{4x(8-x)} \leqslant 0$.
Remarquez que nous avons les mêmes facteurs que l'exemple du produit. Le tableau de signes est donc presque le même :

x	$-\infty$		-2		0		8		$+\infty$
$2x+4$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$4x$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$8-x$		$+$		$+$		$+$	0	$-$	
$\dfrac{2x+4}{4x(8-x)}$		$+$	0	$-$	$\|$	$+$	$\|$	$-$	

$\mathcal{S} = [-2; 0[\cup]8; +\infty[$

Exercice 6 Résoudre les inéquations suivantes :

1. $\dfrac{x+4}{2-x} \geqslant 1$
2. $\dfrac{2x}{x+1} \leqslant 2$

Attention

Faire un produit en croix pour se débarasser du dénominateur...serait une grosse erreur !!!!

Correction des exercices

Exercice 1

1. $\mathcal{S} = \{5\}$
2. $\mathcal{S} = \{-7\}$
3. $\mathcal{S} = \{-8\}$
4. $\mathcal{S} = \{0\}$
5. $\mathcal{S} = \{64\}$
6. $\mathcal{S} = \left\{\dfrac{13}{2}\right\}$
7. $\mathcal{S} = \left\{-\dfrac{17}{24}\right\}$
8. $\mathcal{S} = \left\{\dfrac{8}{9}\right\}$
9. $\mathcal{S} = \left\{-\dfrac{10}{3}\right\}$

Exercice 2

1. $\mathcal{S} = \{1; -2\}$
2. $\mathcal{S} = \left\{0; \dfrac{1}{3}\right\}$
3. $\mathcal{S} = \left\{-2; \dfrac{2}{3}\right\}$
4. $\mathcal{S} = \{1\}$
5. $\mathcal{S} = \left\{-1; \dfrac{4}{3}; \dfrac{3}{2}\right\}$
6. $\mathcal{S} = \{1; 2; 3; 4; 5\}$

Exercice 3

1. $\mathcal{S} = \left\{0; \dfrac{5}{4}\right\}$
2. $\mathcal{S} = \{0; -4; 4\}$
3. $\mathcal{S} = \left\{\dfrac{9}{4}; \dfrac{2}{5}\right\}$
4. $\mathcal{S} = \left\{-9; \dfrac{5}{3}\right\}$
5. $\mathcal{S} = \left\{2; -\dfrac{3}{2}\right\}$
6. $\mathcal{S} = \left\{-\dfrac{7}{3}; \dfrac{11}{3}\right\}$

Exercice 4

1. $2x+6 = 0 \Leftrightarrow 2x = -6 \Leftrightarrow x = -3$

   $\mathcal{S} =]-\infty; -3]$

x	$-\infty$		-3		$+\infty$
$2x+6$		$-$	0	$+$	

2. $-3x-4 = 0 \Leftrightarrow -3x = 4 \Leftrightarrow x = -\dfrac{4}{3}$

   $\mathcal{S} = \left]-\dfrac{4}{3}; +\infty\right[$

x	$-\infty$		$-\dfrac{4}{3}$		$+\infty$
$-3x-4$		$+$	0	$-$	

3. $-x = 0 \Leftrightarrow x = 0$

$\mathcal{S} =]-\infty; 0]$; (résultat évident sans tableau de signes)

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$-x$		$+$	0	$-$	

Exercice 5

1. $x^2 \geqslant 4x \Leftrightarrow x^2 - 4x \geqslant 0 \Leftrightarrow x(x-4) \geqslant 0$

$\mathcal{S} =]-\infty; 0] \cup [4; +\infty[$

x	$-\infty$		0		4		$+\infty$
x		$-$	0	$+$		$+$	
$x-4$		$-$		$-$	0	$+$	
$x(x-4)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

2. $9 > (x-4)^2 \Leftrightarrow 9 - (x-4)^2 > 0$

$\Leftrightarrow (3 + x - 4)(3 - x + 4) > 0$

$\Leftrightarrow (x-1)(7-x) > 0$

$\mathcal{S} =]1; 7[$

x	$-\infty$		1		7		$+\infty$
$x-1$		$-$	0	$+$		$+$	
$7-x$		$+$		$+$	0	$-$	
$(x-1)(7-x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

3. $5x^3 \leqslant 15x \Leftrightarrow 5x^3 - 15x \leqslant 0$

$\Leftrightarrow 5x(x^2 - 3) \leqslant 0$

$\Leftrightarrow 5x(x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3}) \leqslant 0$

$\mathcal{S} =]-\infty; -\sqrt{3}] \cup [0; \sqrt{3}]$

x	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		0		$\sqrt{3}$		$+\infty$
$5x$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-\sqrt{3}$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+\sqrt{3}$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$5x(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Exercice 6

1. $\dfrac{x+4}{2-x} \geqslant 1 \Leftrightarrow \dfrac{x+4}{2-x} - 1 \geqslant 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{x+4-2+x}{2-x} \geqslant 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{2x+2}{2-x} \geqslant 0$

$\mathcal{S} = [-1; 2[$

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$2x+2$		$-$	0	$+$		$+$	
$2-x$		$+$		$+$	0	$-$	
$\dfrac{2x+2}{2-x}$		$-$	0	$+$	$\|$	$-$	

2. $\dfrac{2x}{x+1} \leqslant 2 \Leftrightarrow \dfrac{2x}{x+1} - 2 \leqslant 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{2x - 2(x+1)}{x+1} \leqslant 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{-2}{x+1} \leqslant 0$

$\mathcal{S} =]-1; +\infty[$

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
-2		$-$		$-$	
$x+1$		$-$	0	$+$	
$\dfrac{-2}{x+1}$		$+$	$\|$	$-$	