# DERIVEES

## 1 Taux de variation

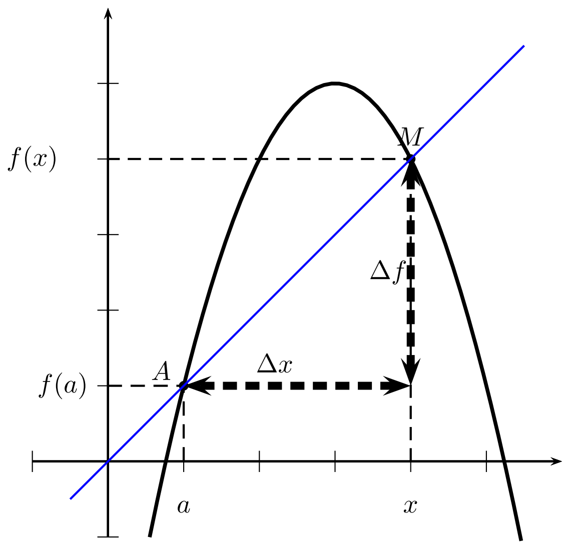
Dans cette partie, $f$ est une fonction numérique définie sur un intervalle $I$, $C$ sa courbe représentative dans un repère.
$a$ et $x$ sont deux réels distincts de $I$.

**Définition**

Le <u>taux de variation</u> de la fonction $f$ entre $a$ et $x$ est le quotient : $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$

Avec $x = a+h$, ce quotient s'écrit aussi : $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$

En maths, ce taux de variation représente l'accroissement vertical par rapport à l'accroissement horizontal. Graphiquement, ceci correspond au coefficient directeur de la corde (segment de droite) reliant les points $A(a; f(a))$ et $M(x; f(x))$. En effet, ce coefficient directeur est $\dfrac{y_M - y_A}{x_M - x_A} = \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$




**Remarque.** En sciences, notamment en physique, le taux de variation permet par exemple de calculer une vitesse moyenne. Ainsi, si $x$ représente le temps et $f(x)$ une distance, alors la vitesse moyenne entre les instants $a$ et $x$ est

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{\text{distance parcourue}}{\text{temps écoulé}}$$

Ceci se généralise à toute grandeur physique étudiée en fonction du temps :

• Accélération (vitesse de variation de vitesse) : $\dfrac{\Delta \text{Vitesse}}{\Delta \text{temps}}$

• Débit (vitesse de variation de volume) : $\dfrac{\Delta \text{Volume}}{\Delta \text{temps}}$

• Pression (vitesse de variation de pression) : $\dfrac{\Delta \text{Pression}}{\Delta \text{temps}}$

• vitesse de réaction chimique : $\dfrac{\Delta \text{Concentration}}{\Delta \text{temps}}$

**Exemple.** Pour $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$, le taux de variation de $f$ entre $a$ et $a+h$ est :

$$\begin{aligned} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} &= \frac{(a+h)^2-a^2}{h} \\ &= \frac{a^2+2ah+h^2-a^2}{h} \\ &= \frac{h(2a+h)}{h} \\ &= 2a+h \end{aligned}$$

## 2 Nombre dérivé

### Définition

On dit que $f$ est <u>dérivable</u> en $a$ et on appelle <u>**nombre dérivé de $f$ en $a$**</u> noté $f'(a)$ la limite suivante, lorsqu'elle existe :

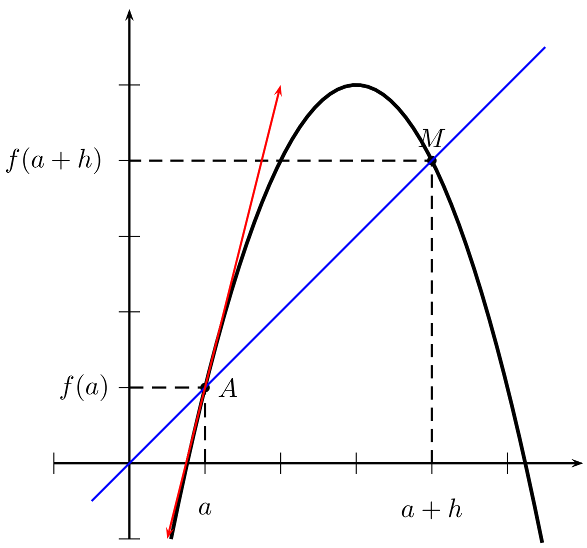
$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

ou avec $x = a+h$ :

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

On dit encore que $f$ est dérivable au point d'abscisse $a$.

**Interprétation graphique :**
Lorsque $x$ se rapproche de $a$, le point $M$ se rapproche de $A$, et la droite $(AM)$ se rapproche de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point $A$
Ainsi, $f'(a)$ est le coefficient directeur de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse $a$




**Exemple.** Pour $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$, calculer le nombre dérivé de $f$ en 3 puis en $-1$ :

$\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h} = 2a+h$ d'après l'exemple précédent

$f'(a) = \lim\limits_{h \to 0} 2a+h = 2a$

$f'(2) = 2 \times 3 = 6$. Le coefficient directeur de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 2 est 6.

$f'(-1) = 2 \times (-1) = -2$. Le coefficient directeur de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse $-1$ est $-2$.

### Important

En maths, il faut (presque) toujours associer nombre dérivé $f'(a)$ et coefficient directeur de la tangente en $a$, surtout lorsqu'il s'agit de lectures graphiques !

**REMARQUE.** En sciences, le nombre dérivé permet d'obtenir une valeur instantanée de la grandeur étudiée à un instant donné. Il s'agit de calculer le taux de variation entre deux instants $a$ et $a+h$ infiniment proches. Par exemple le calcul de la vitesse "moyenne" d'une particule entre deux instants séparés d'une milliseconde (ou microseconde, etc...) donne une bonne approximation de la vitesse instantanée de cette particule autour des instants considérés. C'est ce que font les compteurs de vitesse des véhicules... C'est le même principe pour les accélérations-débits-pression-concentration-etc... instantanés.
La notation, en revanche, est différente. Au lieu de noter $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\Delta f}{\Delta x}$, les physiciens écrivent $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$, le "d" signifiant variation infinitésimale.

**Propriété : Equation de la tangente en $a$**

Soit $f$ une fonction définie sur un intervalle $I$ et dérivable en $a \in I$
La tangente $\mathcal{T}_a$ à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse $a$ a pour équation : $\mathcal{T}_a : y = f'(a)(x-a)+f(a)$

**REMARQUE.** Cette formule est à savoir **par coeur**...ou à savoir retrouver en posant que l'équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse $a$ est du genre : $y = f'(a)x + p$ (puisque $f'(a)$ est le coefficient directeur de la tangente), puis que le point $A(a; f(a))$ est sur la tangente ($A$ est le point de contact de la courbe et de la tangente), et donc que ses coordonnées vérifient $y_A = f'(a)x_A + p \Leftrightarrow f(a) = f'(a)\times a + p \Leftrightarrow p = f(a) - f'(a)\times a$. Ainsi l'équation de la tangente est :
$y = f'(a)x + f(a) - f'(a)a = f'(a)(x-a) + f(a)$.

**EXEMPLE.** Soit $f(x) = x^2 + 2$. Déterminer l'équation de la tangente en 0 et en $-1$.
La fonction dérivée de $f$ est :$f'(x) = 2x$
$f'(0) = 0$ donc $\mathcal{T}_0 : y = 0\times(x-0)+f(0) = 2$
$f'(-1) = -2$ donc $\mathcal{T}_{-1} : y = -2\times(x+1)+f(-1) = -2x+1$

**Attention**

Une erreur fréquente consiste à oublier d'écrire « $y=$ »...Une équation de droite (et donc de tangente) a toujours deux termes séparés par un « $=$ ». Ainsi, dans l'exemple précédent, il n'est pas correct de dire que $-2x+1$ est l'équation de la tangente en $-1$. Veillez donc bien à écrire $\underline{\mathbf{y}=}-2x+1$ ! ! !

## 3 Fonction dérivée

**Définition**

Soit $f$ une fonction dérivable en tout point $x$ d'un intervalle $I$, alors la fonction qui à $x$ associe $f'(x)$ est appelée fonction dérivée de $f$ sur $I$. On la note $f'$

**tableau des dérivées usuelles**

| Fonction $f$ | Fonction $f'$ | Ensemble de dérivabilité de $f$ |
|---|---|---|
| $k$ | $0$ | $\mathbb{R}$ |
| $ax+b$ | $a$ | $\mathbb{R}$ |
| $x$ | $1$ | $\mathbb{R}$ |
| $x^2$ | $2x$ | $\mathbb{R}$ |
| $x^n \quad (n\in\mathbb{N})$ | $nx^{n-1}$ | $\mathbb{R}$ |
| $\dfrac{1}{x}$ | $-\dfrac{1}{x^2}$ | $\mathbb{R}^*$ |
| $\dfrac{1}{x^n} = x^{-n} \quad (n\in\mathbb{N})$ | $-\dfrac{n}{x^{n+1}} = -nx^{-n-1}$ | $\mathbb{R}^*$ |
| $\sqrt{x}$ | $\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ | $\mathbb{R}_+^*$ |
| $\sin(x)$ | $\cos(x)$ | $\mathbb{R}$ |
| $\cos(x)$ | $-\sin(x)$ | $\mathbb{R}$ |

**Exemples.** Calculer la dérivée de chacune des fonctions suivantes :

| | | | |
|---|---|---|---|
| • $f(x) = -2$ | $f'(x) = 0$ | • $f(x) = \dfrac{3}{4}$ | $f'(x) = 0$ |
| • $f(x) = 2 - 4x$ | $f'(x) = -4$ | • $f(x) = \dfrac{3x-5}{7}$ | $f'(x) = \dfrac{3}{7}$ |
| • $f(x) = x^{2015}$ | $f'(x) = 2015x^{2014}$ | • $f(x) = \dfrac{1}{x^5} = x^{-5}$ | $f'(x) = \dfrac{-5}{x^6} = -5x^{-6}$ |

# 4 Opérations sur les fonctions dérivables

### opérations sur les dérivées

$u$ et $v$ sont deux fonctions définies et dérivables sur un même intervalle $I$

| Fonction $f(x)$ | Dérivée $f'(x)$ | Remarques |
|---|---|---|
| $u + v$ | $u' + v'$ | |
| $k \times u$ avec $k \in \mathbb{R}$ | $k \times u'$ | |
| $u \times v$ | $u' \times v + u \times v'$ | |
| $u^2$ | $2 \times u \times u'$ | |
| $\dfrac{u}{v}$ | $\dfrac{u' \times v - u \times v'}{v^2}$ | partout où $v(x) \neq 0$ |
| $\dfrac{1}{v}$ | $-\dfrac{v'}{v^2}$ | partout où $v(x) \neq 0$ |
| $f(ax+b)$ | $af'(ax+b)$ | |

### Je vous prie instamment de suivre le conseil suivant...

**Il est IMPÉRATIF de connaître les deux tableaux précédents PAR COEUR et de savoir les utiliser.**

**Exemples.** Calculer la dérivée de chacune des fonctions suivantes :

1. $f(x) = x^3 + x + 3$ : On utilise la formule $(u+v)' = u' + v'$ avec $u(x) = x^3$ et $v(x) = x + 3$
   on obtient $f'(x) = 3x^2 + 1$

2. $f(x) = 3(x^2 + 4)$ : on utilise la formule $(ku)' = ku'$ avec $k = 3$ et $u(x) = x^2 + 4$
   on obtient $f'(x) = 3 \times 2x = 6x$

3. $f(x) = (5x - 7)^2$ : on utilise la formule $(u^2)' = 2uu'$ avec $u(x) = 5x - 7$
   on obtient $f'(x) = 2 \times 5 \times (5x - 7) = 10(5x - 7)$

4. $f(x) = (-2x + 3)(5x^2 - 3x + 4)$ : On utilise la formule $(uv)' = u'v + uv'$ avec :
   $u(x) = -2x + 3$ et $v(x) = 5x^2 - 3x + 4$ (et donc $u'(x) = -2$ et $v'(x) = 10x - 3$). on obtient :
   $f'(x) = -2 \times (5x^2 - 3x + 4) + (-2x + 3) \times (10x - 3) = -10x^2 + 6x - 8 - 20x^2 + 6x + 30x - 9 = -30x^2 + 42x - 17$

5. $f(x) = \dfrac{2x^3 - 4x}{x^2 + 3}$ : On utilise la formule $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$ avec :
   $u(x) = 2x^3 - 4x$ et $v(x) = x^2 + 3$ (et donc $u'(x) = 6x^2 - 4$ et $v'(x) = 2x$) on obtient :
   $f'(x) = \dfrac{(6x^2 - 4) \times (x^2 + 3) - (2x^3 - 4x) \times 2x}{(x^2 + 3)^2} = \dfrac{6x^4 + 18x^2 - 4x^2 - 12 - 4x^4 \boxed{+} 8x^2}{(x^2 + 3)^2} = \dfrac{2x^4 + 22x^2 - 12}{(x^2 + 3)^2}$

6. $f(x) = \dfrac{1}{-3x + 1}$ : On utilise la formule $\left(\dfrac{1}{v}\right)' = -\dfrac{v'}{v^2}$ avec $v(x) = -3x + 1$
   on obtient $f'(x) = -\dfrac{-3}{(-3x + 1)^2} = \dfrac{3}{(-3x + 1)^2}$

7. $f(x) = \cos(2x + 1)$ : On utilise la formule $[f(ax + b)]' = af'(ax + b)$ avec $f(x) = \cos(x)$ et $ax + b = 2x + 1$
   on obtient $f'(x) = -2\sin(2x + 1)$

# 5 Applications des dérivées

Outre la détermination d'une équation de tangente en un point ou du calcul d'une grandeur instantanée en physique, déjà vus, les dérivées servent essentiellement à étudier les variations de la fonction $f$ considérée et à rechercher des extrema locaux (maximum ou minimum).

## 5.1 Dérivée et variations

**Théorème**

Soit $f$ une fonction dérivable sur un intervalle $I$.
- $f$ est croissante sur $I$ si et seulement si pour tout $x$ de $I$, $f'(x) \geqslant 0$.
- $f$ est constante sur $I$ si et seulement si pour tout $x$ de $I$, $f'(x) = 0$.
- $f$ est décroissante sur $I$ si et seulement si pour tout $x$ de $I$, $f'(x) \leqslant 0$.

On utilisera davantage en TS le théorème suivant :

**Théorème**

- Si, pour tout $x$ de $I$, $f'(x) > 0$ alors $f$ est strictement croissante sur $I$.
- Si, pour tout $x$ de $I$, $f'(x) < 0$ alors $f$ est strictement décroissante sur $I$.

**Exemples.**

1. Étudier les variations de la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x^2 + 8x + 3$.
   $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = -2x + 8$.
   Il s'agit donc d'étudier le signe de $f'(x)$ en fonction de $x$. $f'(x)$ étant du premier degré, ceci s'obtient en résolvant $-2x + 8 = 0$ (voir fiche 1er degré). On obtient $x = 4$. On réalise alors le tableau de signes de $f'$, puis les variations de $f$

| $x$ | $-\infty$ | | $4$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f(x)$ | | ↗ | $19$ | ↘ | |

   Il restera à établir les limites de $f$ en $-\infty$ et en $+\infty$ (chapitre 2) pour compléter le tableau de variations.

2. Étudier les variations de la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 4x^2 + 4x + 5$.
   $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 3x^2 - 8x + 4$.
   Il s'agit donc d'étudier le signe de $f'(x)$ en fonction de $x$. $f'(x)$ étant du second degré, ceci s'obtient en calculant le discriminant et les racines éventuelles (voir fiche second degré). On obtient $\Delta = 16$, puis $x_1 = 2$ et $x_2 = \dfrac{2}{3}$. On réalise alors le tableau de signes de $f'$, puis les variations de $f$ :

| $x$ | $-\infty$ | | $\frac{2}{3}$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | | ↗ | $\frac{167}{27}$ | ↘ | $5$ | ↗ | |

   Il restera à établir les limites de $f$ en $-\infty$ et en $+\infty$ (chapitre 2) pour compléter le tableau de variations.

**Attention**

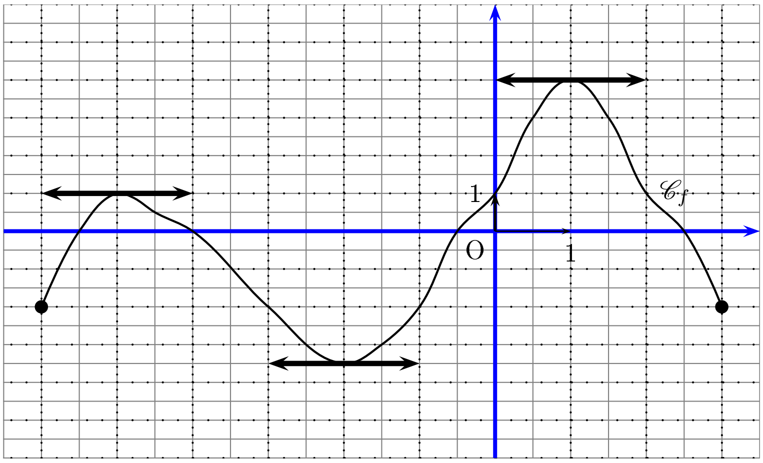
On vous a bien entraîné (formaté ?) à calculer le discriminant $\Delta$ dès qu'un trinôme du second degré pointe le bout de son nez....Veillez à le faire uniquement quand c'est nécessaire. Ainsi, dans le 1er exemple, $f$ est du second degré, certes, mais c'est le signe de $f'$ que nous voulons...et $f'$ est du premier degré...donc pas de $\Delta$ à faire. En revanche, dans le second exemple, $f'$ est du second degré et il faut bien calculer $\Delta$ pour étudier le signe de $f'$.

### 5.2 Extremum local

**Définition**

Soit $f$ une fonction définie sur un intervalle $I$ et $x_0 \in I$.
On dit que $f(x_0)$ est un maximum local (respectivement minimum local) de $f$ si l'on peut trouver un intervalle ouvert $J$ inclus dans $I$ et contenant $x_0$ tel que pour tout $x \in J$, $f(x) \leqslant f(x_0)$ (respectivement $f(x) \geqslant f(x_0)$).

**Exemple.** Une fonction est représentée ci-contre sur $[-6; 3]$.
1 et 4 sont des maxima locaux, respectivement atteints en $-5$ et 1
$-3,5$ est un minimum local, atteint en $-2$
$-2$ n'est pas considéré comme un minimum local en $-6$ ou en 3. Il n'existe pas d'intervalle ouvert inclus dans $[-6; 3]$ et contenant $-6$ ou 3



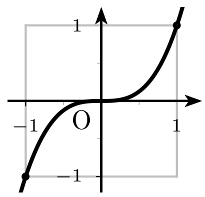

**Théorème**

Soit $f$ une fonction dérivable sur un intervalle $I$ et $x_0 \in I$.
Si $f(x_0)$ est un extremum local de $f$ alors $f'(x_0) = 0$. La tangente en $x_0$ est horizontale.

Pour les trois extrema locaux de l'exemple précédent, la dérivée s'annule bien (tangente horizontale).

**Remarque.** La réciproque de cette propriété est fausse.

Prenons $f(x) = x^3$, de dérivée $f'(x) = 3x^2$.
$f'(0) = 0$, mais la représentation graphique de $f$ n'admet pas d'extremum local en 0.




Le théorème suivant permet toutefois d'utiliser la dérivée pour déterminer les extrema locaux.

**Théorème**

Soit $f$ une fonction dérivable sur un intervalle $I$ et $x_0 \in I$.
Si $f'$ s'annule **en changeant de signe en $x_0$** alors $f(x_0)$ est un extremum local de $f$.

**Exemple.** Reprenons le graphique de l'exemple précédent. On peut alors lire les variations de la fonction $f$, puis en déduire le signe de la fonction $f'$

La dérivée $f'$ s'annule et change de signe aux points d'abscisses $-5$, $-2$ et 1. $f$ admet donc trois extrema locaux en ces points !

| $x$ | $-6$ | | $-5$ | | $-2$ | | $1$ | | $3$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $-2$ | ↗ | $1$ | ↘ | $-3.5$ | ↗ | $4$ | ↘ | $-2$ |
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |