CALCUL NUMERIQUE ET ALGEBRIQUE

Le « moins » devant une parenthèse

Commençons par l'erreur la plus fréquente, commise même par les meilleurs, et qui risque de vous coûter énormément de points. Il s'agit d'une règle de développement très simple, que vous connaissez tous, mais que vous oubliez d'appliquer dès que le contexte se complique. On la retrouvera dans les développements, la mise au même dénominateur, les substitutions, les calculs de dérivées, etc..., autrement dit partout !

Règle :

Lorqu'une parenthèse est précédée d'un signe « moins », on peut enlever la parenthèse en changeant tous les signes des termes situés à l'intérieur de cette parenthèse.

Les exemples qui suivent font appel à des techniques revues plus loin. Si celles-ci posent problème, revoir les propriétés concernées, puis revenir sur ces exemples...

Exemples.

- $2x-3-(x^2-5x+2) = 2x-3-x^2+5x-2 = -x^2+7x-5$ (et non $2x-3-x^2-5x+2$)
- $x^2-(-x+3)(2x-4) = x^2-(-2x^2+4x+6x-12) = x^2+2x^2-10x+12 = 3x^2-10x+12$
- L'opposé de $2x-1$ est $-2x+1$ car $-(2x-1) = -2x+1$ (et non $2x+1$)
- $4-\dfrac{x-5}{x-2} = \dfrac{4(x-2)}{x-2}-\dfrac{x-5}{x-2} = \dfrac{4x-8}{x-2}-\dfrac{x-5}{x-2} = \dfrac{4x-8-(x-5)}{x-2} = \dfrac{4x-8-x+5}{x-2} = \dfrac{3x-3}{x-2}$
- La dérivée de la fonction $f : x \longmapsto \dfrac{3-5x}{x+2}$ est :

$f'(x) = \dfrac{-5(x+2)-(3-5x)}{(x+2)^2} = \dfrac{-5x-10-3+5x}{(x+2)^2} = \dfrac{-13}{(x+2)^2}$

Remarque

Même si la règle est simple, les erreurs commises tiennent de trois raisons majeures :
– trop de précipitation : vous développez un produit précédé d'un signe « moins »et changez les signes en même temps : dans le second exemple, la première étape peut être supprimée, mais il faut alors redoubler de vigilance !
– Les parenthèses ne sont pas présentes initialement, et donc on oublie de les mettre lorsque les calculs les rendent indispensables. Relisez attentivement les exemples 4 et 5 et observez bien les moments où elles apparaissent !
– l'étourderie...

1 Les fractions

Rappels des propriétés essentielles

chaque dénominateur étant non nuls, on peut écrire :

$$\frac{a}{b} = \frac{a\times k}{b\times k} \quad \overset{\text{exemple}}{\Longrightarrow} \quad \frac{15}{12} = \frac{5\times \cancel{3}}{4\times \cancel{3}} = \frac{5}{4}$$

$$\frac{a}{c} \pm \frac{b}{c} = \frac{a\pm b}{c} \quad \overset{\text{exemple}}{\Longrightarrow} \quad \frac{2}{3}-\frac{7}{3} = \frac{2-7}{3} = \frac{-5}{3}$$

$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{ad\pm bc}{bd} \quad \overset{\text{exemple}}{\Longrightarrow} \quad \frac{3}{8}+\frac{2}{3} = \frac{3\times 3}{8\times 3}+\frac{2\times 8}{3\times 8} = \frac{9+16}{24} = \frac{25}{24}$$

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd} \quad \overset{\text{exemple}}{\Longrightarrow} \quad \frac{-3}{5}\times\frac{1}{7} = \frac{-3\times 1}{5\times 7} = \frac{-3}{35}$$

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b}\times\frac{d}{c} = \frac{ad}{bc} \quad \overset{\text{exemple}}{\Longrightarrow} \quad \frac{\frac{1}{4}}{\frac{7}{9}} = \frac{1}{4}\times\frac{9}{7} = \frac{9}{28}$$

Exercice 1

1. Donner l'écriture des nombres suivants sous la forme d'un entier ou d'une fraction irréductible.

$A = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{4}$

$B = 2 - \dfrac{13}{7} + \dfrac{4}{3}\left(1 - \dfrac{5}{2}\right)$

$C = \left(\dfrac{2}{3} - \dfrac{3}{4}\right) - 3\left(\dfrac{4}{5} - \dfrac{5}{6}\right)$

$D = \left(\dfrac{5}{2} + \dfrac{5}{3}\right) \times \left(3 + \dfrac{7}{5}\right) \div \left(\dfrac{5}{2} + \dfrac{7}{6}\right)$

$E = \dfrac{\dfrac{2}{3} + \dfrac{3}{5} - \dfrac{4}{5} \times \dfrac{3}{4}}{\dfrac{2}{5} \times \dfrac{4}{3} + \dfrac{2}{3}}$

2. Mettre au même dénominateur :

$A = \dfrac{2}{x} - \dfrac{5}{4x}$

$B = 4 - \dfrac{x+5}{2x-3}$

$C = \dfrac{x-3}{x+1} - \dfrac{4-x}{x+2}$

$D = \dfrac{5}{x-3} - \dfrac{2}{x+3} - \dfrac{-2x-7}{x^2-9}$

Se méfier des simplifications abusives...Ce qui suit est FAUX !!

$\dfrac{\cancel{x}+2}{\cancel{x}} = 2$ (est égal en fait à $1 + \dfrac{2}{x}$)

$\dfrac{\cancel{x}+2}{\cancel{x}+7} = \dfrac{2}{7}$ (aucune simplification possible)

2 Les puissances

Rappels des propriétés essentielles

Pour tous réels a et b non nuls, m et n entiers, on peut écrire :

$$a^0 = 1$$

$$a^n \times a^m = a^{n+m} \quad \overset{\text{exemple}}{\Longrightarrow} \quad 2^3 \times 2^6 = 2^{3+6} = 2^9$$

$$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m} \quad \overset{\text{exemple}}{\Longrightarrow} \quad \frac{5^8}{5^2} = 5^{8-2} = 5^6$$

$$(a \times b)^n = a^n \times b^n \quad \overset{\text{exemple}}{\Longrightarrow} \quad (3 \times 7)^2 = 3^2 \times 7^2$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n} \quad \overset{\text{exemple}}{\Longrightarrow} \quad \left(\frac{-1}{2}\right)^5 = \frac{(-1)^5}{2^5} = -\frac{1}{32}$$

$$(a^n)^m = a^{n \times m} \quad \overset{\text{exemple}}{\Longrightarrow} \quad (10^3)^5 = 10^{3\times 5} = 10^{15}$$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \quad \overset{\text{exemple}}{\Longrightarrow} \quad 2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$$

Exercice 2 Simplifier les nombres suivants :

$A = (-2)^4$

$B = -2^4$

$C = 3^2 \times 3^{-4} \times 3^7 \times 3$

$D = \dfrac{2 \times 2^2 \times 2^3}{2^4 \times 2^5}$

$E = (2 \times 3^2 \times 3^{-3})^4$

$F = \dfrac{2^3 \times (-5)^4 \times 7^3}{5^3 \times 7^2 \times 2}$

$G = 81^5 \times (3^3)^{-5} \times \dfrac{1}{9}$

$H = \dfrac{4^{-2} \times 8^3}{16^3}$

$I = \dfrac{(-9)^3 \times 27^{-2} \times 75^2}{5^2 \times 3^4}$

$J = \left(\dfrac{2}{3}\right)^{11} \times \left(\dfrac{3}{2}\right)^{10}$

N'inventez pas vos propres formules...Ce qui suit est FAUX !!

$2^3 \times 3^4 = 6^7$, ce qui donnerait en littéral $a^n \times b^p = (ab)^{n+p}$

$2 \times 5^n = 10^n$, confusion entre $a \times b^n$ et $(a \times b)^n$.

3 Les racines carrées

Rappels des propriétés essentielles

Pour tous réels a et b positifs, on peut écrire :

$$(\sqrt{a})^2 = \sqrt{a^2} = a \quad \overset{\text{exemple}}{\Longrightarrow} \quad (\sqrt{3})^2 = \sqrt{9} = 3$$

$$\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b} \quad \overset{\text{exemple}}{\Longrightarrow} \quad \sqrt{4 \times 3} = \sqrt{4} \times \sqrt{3} = 2\sqrt{3}$$

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} \quad \overset{\text{exemple}}{\Longrightarrow} \quad \sqrt{\frac{5}{9}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{9}} = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

$$\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b} \quad \overset{\text{contrexemple}}{\Longrightarrow} \quad \begin{array}{l} \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5 \\ \sqrt{9} + \sqrt{16} = 3 + 4 = 7 \end{array}$$

Remarque

Si on ne connaît pas le signe de a, alors il faut écrire :
$\sqrt{a^2} = |a|$ (valeur absolue). En effet :

$\sqrt{(-5)^2} = \sqrt{25} = 5$ et non -5. On a bien $\sqrt{(-5)^2} = |-5| = 5$

Exercice 3 Simplifier l'écriture des nombres suivants :

$A = \sqrt{12}$
$B = \sqrt{48}$
$C = \sqrt{36 + 64}$
$D = 3\sqrt{2} + 8\sqrt{2} - 5\sqrt{2}$
$E = 5\sqrt{27} - 2\sqrt{48}$

$F = \dfrac{\sqrt{81}}{\sqrt{242}} \times \sqrt{\dfrac{98}{25}}$
$G = \dfrac{3}{\sqrt{7}}$
$H = (2 - \sqrt{3})^2$
$I = 3(1 + \sqrt{2})(1 - \sqrt{2})$

4 DEVELOPPER-FACTORISER

On souhaite transformer des expressions algébriques pour les mettre sous différentes formes :

Définition

Développer, c'est transformer un produit de facteurs en une somme de facteurs.
Factoriser, c'est transformer une somme de facteurs en un produit de facteurs.

Exemples. Expressions sous forme développée :
$A(x) = x - 2 - 14x + 5$
$B(t) = 3t^2 - 4t + 1$
$C(\alpha) = \alpha^3 + 6\alpha - 4$

Expressions sous forme factorisée :
$D(x) = -5(x + 1)$
$E(z) = (4z + 1)(z + 3)$
$F(t) = (2t - 3)^2$

Afin de factoriser ou développer des expressions, on utilise les propriétés de développement (distributivité simple ou double), ou très régulièrement les identités remarquables vue au collège :

Propriétés

$k(a + b) = ka + kb$
$(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$
$a - (b + c - d) = a - b - c + d$

$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$

1. Développements :

Dans les trois exercices de cette section, il s'agit de développer, réduire et ordonner les expressions données.

Utilisation de la distributivité :

Exercice 4

$A(x) = -2(3x+1)$
$B(x) = (2x+3)(3x+2)$
$C(x) = (2-5x)(x-3)$
$D(x) = 3(x+3)(x-2)$
$E(x) = (2x^2-3x+1)(3-2x)$
$F(x) = (x^2-4x+3)(2x^2-5)-(-2x^2+3)(x^2-1)$

Utilisation des identités remarquables :

Exercice 5

$A(x) = (3x+4)^2$
$B(x) = (2x-3)^2$
$C(x) = (5x-2)(5x+2)$
$D(x) = (-2x-4)^2$

Mélange de genres ... :

Certaines expressions sont plus complexes à développer car elles contiennent à la fois des distributivités et des identités remarquables :

Exercice 6

$A(x) = 4(2x+5)^2+(x-3)(5x-7)$
$B(x) = (2x-3)(-x-2)-(2x+1)(2x-1)$
$C(x) = (x-3)(x+5)^2-(-3x+2)(x-5)^2$

2. Factorisation d'une expression :

Dans les trois exercices de cette section, il s'agit de factoriser au maximum les expressions données.

Utilisation d'un facteur commun :

Cette technique consiste à mettre en évidence un facteur commun dans la « somme » : on décompose en produit chaque terme de façon à trouver un facteur en commun le plus grand possible.

Exercice 7

$A(x) = 6x^2+10x$
$B(x) = x^3+x$
$C(x) = 2x^3-3x^2$
$D(x) = (3x+2)(4x-1)+(3x+2)(-6x+8)$
$E(x) = (3x-4)^2-(2x-5)(3x-4)$
$F(x) = (2x-3)^2-(2x-3)$

Utilisation des identités remarquables :

On tente de « comparer » notre expression à l'une des identités remarquables :
- S'il y a trois termes, ils peuvent être de la forme $a^2+2ab+b^2$ ou $a^2-2ab+b^2$,
- s'il y a deux termes, ils peuvent être de la forme : a^2-b^2.

Exercice 8

$A(x) = 9x^2+42x+49$
$B(x) = 25x^2-60x+36$
$C(x) = 9x^2-64$
$D(x) = (2x-3)^2-(x+5)^2$

Mélange de genres ...

Il arrive pourtant qu'un facteur commun ne saute pas aux yeux, tout comme une identité remarquable. Dans ce cas, on examine chaque terme de la somme et on essaye de le factoriser.

Exercice 9

$A(x) = x^3-4x$
$B(x) = (2x-5)(7+3x)-(4x^2-20x+25)$
$C(x) = 9x^2+30x+25+(x-3)(3x+5)$
$D(x) = (x+3)(6x+9)-(4x^2-9)$

Remarque

Les techniques de factorisation employées ici sont celles utilisées jusqu'en seconde. La technique de factorisation utilisant le discriminant est détaillée dans la fiche sur le second degré. Même si certains des exercices précédents sont très artificiels (pour s'entraîner), il convient néanmoins d'en maîtriser les bases afin de ne pas avoir besoin de faire appel au discriminant pour déterminer les racines ou la factorisation de trinômes tels que $f(x) = x^2-3x$ ou $g(x) = -x^2+9$

Exercice 1

1. $A = \dfrac{5}{12}$; $B = -\dfrac{13}{7}$; $C = \dfrac{1}{60}$; $D = 5$; $E = \dfrac{5}{9}$
2. $A = \dfrac{3}{4x}$; $B = \dfrac{7x-17}{2x-3}$; $C = \dfrac{2x^2-4x-10}{(x+1)(x+2)}$; $D = \dfrac{5x+28}{(x+3)(x-3)}$

Exercice 2

$A = 16$; $B = -16$; $C = 3^6 = 729$; $D = 2^{-3} = \dfrac{1}{8}$; $E = 2^4 \times 3^{-4} = \dfrac{2^4}{3^4} = \dfrac{16}{81}$

$F = 140$; $G = 27$; $H = 2^{-7} = \dfrac{1}{2^7} = \dfrac{1}{128}$; $I = -\dfrac{25}{9}$; $J = \dfrac{2}{3}$

Exercice 3

$A = 2\sqrt{3}$; $B = 4\sqrt{3}$; $C = 10$; $D = 6\sqrt{2}$; $E = 7\sqrt{3}$

$F = \dfrac{63}{55}$; $G = \dfrac{3\sqrt{7}}{7}$; $H = 7 - 4\sqrt{3}$; $I = -3$

Exercice 4

$A = -6x - 2$; $B = 6x^2 + 13x + 6$; $C = -5x^2 + 17x - 6$; $D = 3x^2 + 3x - 18$

$E = -4x^3 + 12x^2 - 11x + 3$; $F = 4x^4 - 8x^3 - 4x^2 + 20x - 12$

Exercice 5

$A = 9x^2 + 24x + 16$; $B = 4x^2 - 12x + 9$; $C = 25x^2 - 4$; $D = 4x^2 + 16x + 16$

Exercice 6

$A = 21x^2 + 58x + 121$; $B = -6x^2 - x + 7$; $C = 4x^3 - 25x^2 + 90x - 125$

Exercice 7

$A = 2x(3x+5)$; $B = x(x^2+1)$; $C = x^2(2x-3)$

$D = (3x+2)(-2x+7)$; $E = (3x-4)(x+1)$; $F = (2x-3)(2x-4)$

Exercice 8

$A = (3x+7)^2$; $B = (5x-6)^2$; $C = (3x-8)(3x+8)$; $D = (3x+2)(x-8)$

Exercice 9

$A = x(x-2)(x+2)$; $B = (2x-5)(x+12)$; $C = (3x+5)(4x+2)$; $D = (2x+3)(x+12)$